УДК 517.2

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ШВАРЦА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ ПО ДУГЛИСУ

В.Г. Николаев

Новгородский Государственный университет,
Институт электронных и информационных систем,
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Новгород, 173003, Россия, e-mail:vg14@inbox.ru

Аннотация. Статья посвящена вопросу о единственности решения однородной задачи Шварца для вектор-функций, аналитических по Дуглису. Построены два примера матриц, для которых единственность не имеет места и приведены два класса матриц, для которых решение единственно.

Ключевые слова: вектор-функция, матрица, собственное число, собственный вектор, голоморфность, замкнутый контур, частная производная.

Настоящая статья посвящена исследованию задачи Шварца для функций, аналитических по Дуглису. Сначала несколько вводных замечаний. Всюду для краткости будем обозначать ϕ_x и ϕ_y частные производные функции $\phi(x,y)$ по x и по y соответственно. Также обозначим $p\big|_\Gamma$ сужение функции $p(x,y)$ на контур Г. Символ $\mathrm{Re}\,\phi$ обозначает реальную часть функции ϕ.

Определение 1. *Пусть комплексная n-вектор-функция $\phi(x,y)$ двух вещественных переменных x, y имеет в области G первые частные производные по x и по y и J – $n \times n$-матрица, все собственные числа которой лежат в верхней полуплоскости. Пусть в области G выполнено равенство*

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Тогда функцию ϕ назовем аналитической по Дуглису, или J-аналитической в области G.

Как показано в [1], условия (1) достаточно для аналитичности функции ϕ. При этом не нужно требовать даже непрерывности первых частных производных.

Нелишне отметить, что аналитические по Дуглису функции широко применяются при исследовании решений краевых задач для эллиптических уравнений в частных производных [1], поэтому их изучение представляет большой самостоятельный интерес.

1. Сформулируем задачу Шварца. Пусть область G ограничена гладким контуром Г. Требуется найти J-аналитическую в области G функцию $\phi(z)$, которая непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ и удовлетворяет краевому условию

$$\mathrm{Re}\,\phi\big|_\Gamma = f\,, \tag{2}$$

где вещественная вектор-функция $f \in C(\Gamma)$ задана.

Наше дальнейшее исследование будет посвящено вопросу единственности задачи Шварца, то есть для каких матриц J однородная ($f = 0$) задача (2) имеет только постоянные решения.

2. Сделаем некоторые вспомогательные замечания.

Определение 2. *Пусть скалярная комплексная функция $\phi(x, y)$ двух вещественных переменных x, y имеет в области G первые частные производные по x п по y. Обозначим $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$ комплексное число, лежащее в верхней полуплоскости. В случае скалярной матрицы $J = \lambda$ функцию ϕ в определении 1 назовем λ-голоморфной в области G,. В этом случае она удовлетворяет уравнению*

$$\phi_y - \lambda \cdot \phi_x = 0 \tag{3}$$

для всех точек $(x, y) \in G$.

При $\lambda = i$ эта функция совпадает с обычной голоморфной.

Ниже мы будем использовать следующее очевидное свойство J-аналитических функций, которое вытекает непосредственно из их определения: сумма и разность двух J-аналитических функций есть функция J-аналитическая.

Известно [2], что обычная голоморфная функция (то есть при $\lambda = i$) равна константе, если ее вещественная часть на замкнутом контуре $\Gamma \subset G$ равна нулю. Покажем, что это верно и для произвольного λ, то есть *однородная задача Шварца имеет единственное решение для скалярных λ-голоморфных функций.*

Предложение 1. *Пусть скалярная функция $\phi = u(x, y) + iv(x, y)$ λ-голоморфна в области G и пусть замкнутый контур $\Gamma \subset G$. Тогда если числа a, b вещественны, причем $au + bv\big|_\Gamma = 0$, то ϕ является константой.*

☐ Применим неособенную подстановку

$$\begin{cases} x_1 = x + \lambda_1 y\,, \\ y_1 = \lambda_2 y, \;\; \lambda_2 > 0 \end{cases} \tag{4}$$

для λ-голоморфной функции (3). Тогда

$$\begin{cases} \phi_y = \dfrac{\partial \phi}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dy} + \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dy} = \lambda_2 \cdot \phi_{y_1} + \lambda_1 \cdot \phi_{x_1}\,, \\[2ex] \phi_x = \dfrac{\partial \phi}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dx} = 0 + 1 \cdot \phi_{x_1}\,. \end{cases}$$

Подставив эти равенства в (3), имеем:

$$\lambda_2 \cdot \phi_{y_1} + \lambda_1 \cdot \phi_{x_1} - (\lambda_1 + \lambda_2 i)\phi_{x_1} =$$

$$= \lambda_2 \cdot \phi_{y_1} + \lambda_1 \cdot \phi_{x_1} - \lambda_1\phi_{x_1} - \lambda_2 i\phi_{x_1} = \lambda_2 \cdot \phi_{y_1} - \lambda_2 i\phi_{x_1} = 0,$$

или, сокращая на $\lambda_2 > 0$, $\phi_{y_1} - i\phi_{x_1} = 0$. Таким образом, в новых переменных x_1, y_1 функция $\phi = u + iv$ является обычной голоморфной. При этом $au(x_1, y_1) + bv(x_1, y_1)\big|_{\Gamma'} = 0$ на другом замкнутом контуре Γ', получаемом из Γ путем преобразования (4). Следовательно, ϕ есть константа в новых переменных x_1, y_1, а поэтому в силу обратимости (4) и в старых переменных x, y. ■

3. Приведём примеры матриц, для которых решение однородной задачи Шварца неединственно.

Как нетрудно видеть, однородная ($f = 0$) задача Шварца всегда имеет решение, являющееся вектор-константой. Приведем две такие матрицы и соответствующие им вектор-функции, для которых однородная задача Шварца имеет еще и другое решение, не совпадающее с константой.

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$J = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 2 & 3i \end{pmatrix}$$

Ее собственные числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = i$. Теперь пусть

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1 + ixy \\ (x^2 + y^2)i \end{pmatrix}.$$

Как нетрудно видеть, $\mathrm{Re}\,\phi\big|_{\Gamma} = 0$ на эллипсе $\Gamma: \ \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$, но при этом $\phi \neq \mathrm{const}$.

Легко также проверить, что предъявленная функция ϕ действительно является J-голоморфной, то есть удовлетворяет равенству $\phi_y = J \cdot \phi_x$ из определения 1.

Пример 2. Рассмотрим матрицу, имеющую *различные* собственные числа $\lambda = i$ и $\mu = 2i$:

$$J = \begin{pmatrix} 4i & 3 \\ 2 & -i \end{pmatrix}.$$

Функция ϕ будет следующей:

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 + 4y^2 - 1 - 2xyi \\ -i(x^2 + 2y^2) \end{pmatrix}.$$

Имеем: $\mathrm{Re}\,\phi\big|_{\Gamma} = 0$ на эллипсе $\Gamma: \ \frac{1}{2}x^2 + 4y^2 = 1$, но при этом $\phi \neq \mathrm{const}$.

Непосредственно показывается, что $\phi_y = J \cdot \phi_x$ согласно определению 1.

4. Рассмотрим некоторые классы 2×2-матриц, для которых решение однородной задачи Шварца единственно. Перейдем к поиску таких матриц. При этом мы будем использовать предложение 1.

Прежде всего, единственность имеет место для треугольных и диагональных матриц, что довольно очевидно. Действительно, если

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \xi & \mu \end{pmatrix},$$

где ξ – произвольно, а числа λ и μ лежат в верхней полуплоскости, то равенство (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} p+iq \\ u+iv \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \xi & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p+iq \\ u+iv \end{pmatrix}_x = 0, \quad (x,y) \in G,$$

Пусть $p\big|_\Gamma = u\big|_\Gamma = 0$ на замкнутом контуре $\Gamma \subset G$. На основании первой строки последнего равенства видим, что $p+iq$ – это λ-голоморфная функция, согласно определению 2. Отсюда по предложению 1 условие $p\big|_\Gamma = 0$ означает, что $p+iq \equiv \mathrm{const}$. Следовательно, функция $u+iv$ удовлетворяет (3), то есть является μ-голоморфной. Поэтому если $u\big|_\Gamma = 0$, то $u+iv \equiv \mathrm{const}$, согласно тому же предложению 1. Итак, ϕ есть вектор-константа, что и требовалось. Как нетрудно видеть, совершенно аналогичная ситуация будет и для верхнетреугольных матриц.

Таким образом, нас в дальнейшем будут интересовать только нетреугольные матрицы. В приведенных ниже двух теоремах мы выделяются классы матриц, для которых однородная задача (2) имеет единственное решение.

Теорема 1. *Пусть 2-вектор-функция $\phi(x,y)$ является J-аналитической области G с нетреугольной 2×2-матрицей J, причем J имеет единственное собственное число λ, лежащее в верхней полуплоскости и вещественный собственный вектор. Тогда условие* $\mathrm{Re}\,\phi\big|_\Gamma = 0$ *на замкнутом контуре $\Gamma \subset G$ означает, что ϕ равна вектор-константе.*

□ Сразу отметим, что собственный вектор матрицы J может быть выбран вещественным, то есть имеющим вещественные компоненты.

Обозначим E единичную матрицу и пусть $\overline{y} \neq 0$ – некоторый 2-вектор. Рассмотрим матрицу B, столбцами которой являются векторы $\overline{y}$ и $\overline{x} = (J-\lambda E)\overline{y}$, то есть $B = (\overline{y}, \overline{x})$. Как несложно показать, если векторы $\overline{y}, \overline{x}$ – ненулевые, то $\det B \neq 0$.

Действительно, пусть $\alpha\overline{x}+\beta\overline{y} = \alpha(J-\lambda E)\overline{y}+\beta\overline{y} = 0$, где α и β – произвольные числа. Умножим это равенство на $(J-\lambda E)$, тогда будем иметь: $\alpha(J-\lambda E)^2\overline{y}+\beta(J-\lambda E)\overline{y} = 0$. Следовательно, $\beta(J-\lambda E)\overline{y} = 0$, так как $(J-\lambda E)^2 = 0$ по теореме Кэли-Гамильтона. Но по условию $(J-\lambda E)\overline{y} \neq 0$, поэтому $\beta = 0$. Таким образом из первого равенства $\alpha(J-\lambda E)\overline{y} = 0$, откуда $\alpha = 0$, так как $(J-\lambda E)\overline{y} \neq 0$. Итак, $\alpha = \beta = 0$, что по определению и означает линейную независимость векторов $\overline{y}$ и $\overline{x}$.

По уже упомянутой теореме Кэли-Гамильтона $(J-\lambda E)^2 = 0$. Вычислим $J\overline{x} = J(J-\lambda E)\overline{y} = (J-\lambda E+\lambda E)(J-\lambda E)\overline{y} = (J-\lambda E)^2\overline{y}+\lambda E(J-\lambda E)\overline{y} = \lambda\overline{x}$, то есть вектор $\overline{x}$ является собственным. Кроме того, $J\overline{y} = (J-\lambda E+\lambda E)\overline{y} = (J-\lambda E)\overline{y}+\lambda\overline{y} = \overline{x}+\lambda\overline{y}$.

Далее заметим, что поскольку

$$B^{-1}\cdot B = B^{-1}\cdot(\overline{y},\overline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$B^{-1}\overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая вышесказанное, вычислим

$$B^{-1}JB = B^{-1}J(\overline{y},\overline{x}) = B^{-1}(J\overline{y}, J\overline{x}) = B^{-1}(\lambda\overline{y}+\overline{x}, \lambda\overline{x}) =$$

$$= \left(B^{-1}\lambda\overline{y} + B^{-1}\overline{x}, B^{-1}\lambda\overline{x}\right) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = J'.$$

Итак, $B^{-1}JB = J'$, где J' – нижнетреугольная жорданова клетка. Отметим, что векторы $\overline{y}$ и $\overline{x}$ принято называть жордановым базисом матрицы J.

Обозначим исходную матрицу

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

тогда

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Присоединенный вектор $\overline{y}$ мы можем выбрать любым, лишь бы при этом выполнялось условие $\det(\overline{y}, \overline{x}) \neq 0$. Положим

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и вычислим

$$B = (\overline{y}, \overline{x}) = [\overline{y}, (J - \lambda E)\overline{y}] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_{11} - \lambda \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + bi \\ 0 & k(a + bi) \end{pmatrix},$$

где $a + bi \neq 0$ – комплексное число, k – вещественно, $k \neq 0$, так как по условию собственный вектор $\overline{x}$ кратен вещественному и $a_{21} \neq 0$ (матрица J – нетреугольна).

Пусть $\phi(x, y)$ – произвольная J-аналитическая функция в области G. Поскольку $B^{-1}JB = J'$, то $J = BJ'B^{-1}$, откуда

$$\left(B^{-1}\phi\right)_y - J \cdot \left(B^{-1}\phi\right)_x = 0\,. \tag{5}$$

Обозначим

$$B^{-1}\phi = \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где p, q, u, v – вещественные функции переменных x и y. Тогда, в силу (5),

$$\begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix}_x = 0. \tag{7}$$

На основании (6)

$$\phi = B \cdot \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + au - bv + (q + av + bu)i \\ k(au - bv) + (kav + kbu)i \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Пусть $\mathrm{Re}\,\phi\big|_\Gamma = 0$ на замкнутом контуре $\Gamma \subset G$. Тогда с учетом (8)

$$\begin{cases} p + au - bv\big|_\Gamma = 0, \\ k(au - bv)\big|_\Gamma = 0, \quad k \neq 0, \end{cases} \tag{9}$$

то есть $p\big|_\Gamma = 0$. При этом первая строка (7) представляет собой равенство $(p+iq)_y - \lambda(p+iq)_x = 0$, то есть функция $p+iq$ является λ-голоморфной. Поэтому, согласно предложению 1, $p+iq \equiv \text{const}$.

Здесь заметим, что если бы вектор $\overline{x}_\lambda$ не был кратным вещественному, то вторая строка (9) не была бы пропорциональна $au-bv$ и равенство $p\big|_\Gamma = 0$ мы бы не получили. *В этом месте используется вещественность вектора* $\overline{x}$.

Таким образом, вторую строку (7) можно переписать в виде

$$(u+iv)_y - \lambda(u+iv)_x = \frac{d}{dx}(\text{const}) = 0,$$

в силу чего функция $u+iv$ так же λ-голоморфна. Но согласно (9) $k(au-bv)\big|_\Gamma = 0$, откуда, в силу того же предложения 1, $u+iv \equiv \text{const}$. Таким образом, ϕ является 2-вектор-константой, что и требовалось. ■

Теперь возникает справедливый вопрос: что будет, если матрица J имеет разные собственные числа? Покажем, что имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть 2×2-матрица J имеет различные собственные числа $\lambda \neq \mu$, лежащие в верхней полуплоскости, и хотя бы один вещественный собственный вектор. Тогда однородная задача Шварца имеет единственное решение.*

□ Доказательство использует, с некоторой модификацией, схему доказательства предыдущей теоремы. Пусть

$$\overline{y}_\mu = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{x}_\lambda = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$$

– собственные векторы матрицы J, соответствующие различным собственным числам $\mu \neq \lambda$, причем k – вещественное число, *то есть вектор $\overline{x}_\lambda$ – вещественный,* а число c в общем случае комплексное. (Как известно, собственный вектор определен с точностью до множителя, поэтому не умаляя общности можно каждый из них записать в приведенном выше виде).

Составим матрицу B, столбцами которой будут векторы $\overline{y}_\mu - \overline{x}_\lambda$ и $\overline{x}_\lambda$, то есть

$$B = (\overline{y}_\mu - \overline{x}_\lambda, \overline{x}_\lambda) = \begin{pmatrix} c-k & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где числа a, b, k – вещественные.

Поскольку $B^{-1}\cdot B = B^{-1}\cdot(\overline{y}_\mu - \overline{x}_\lambda, \overline{x}_\lambda) = E$, то

$$B^{-1}(\overline{y}_\mu - \overline{x}_\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}\overline{x}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$B^{-1}\overline{y}_\mu = B^{-1}(\overline{y}_\mu - \overline{x}_\lambda) + B^{-1}\overline{x}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $J\overline{x}_\lambda = \lambda x_\lambda$, $J\overline{y}_\mu = \mu y_\mu$, так как векторы $\overline{x}_\lambda$, $\overline{y}_\mu$ – собственные по условию. С учетом вышесказанного

$$B^{-1}JB = B^{-1}J(\overline{y}_\mu - \overline{x}_\lambda, \overline{x}_\lambda) = B^{-1}(J\overline{y}_\mu - J\overline{x}_\lambda, J\overline{x}_\lambda) =$$

$$= B^{-1}(\mu\overline{y}_\mu - \lambda\overline{x}_\lambda, \lambda\overline{x}_\lambda) = \left[\mu B^{-1}\overline{y}_\mu - \lambda B^{-1}\overline{x}_\lambda, \lambda B^{-1}\overline{x}_\lambda\right] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \mu - \lambda & \lambda \end{pmatrix} = J'.$$

Итак, $B^{-1}JB = J'$, где J' – нижнетреугольная матрица. Теперь используем схему доказательства теоремы 1.

Пусть произвольная функция $\phi(x, y)$ является J-аналитической в области G. Так как $B^{-1}JB = J'$, то $J = BJ'B^{-1}$. Поэтому с учетом (1) $\phi_y - BJ'B^{-1}\phi_x = 0$, откуда

$$(B^{-1}\phi)_y - J'(B^{-1}\phi)_x = 0. \tag{10}$$

Обозначим

$$B^{-1}\phi = \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где p, q, u, v – вещественные функции переменных x и y. Тогда в силу (10)

$$\begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \mu - \lambda & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix}_x = 0. \tag{12}$$

Согласно (11)

$$\phi = B \cdot \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bi & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ap - bq + ku + (aq + bp + kv)i \\ u + iv \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Пусть $\mathrm{R}e\,\phi\big|_\Gamma = 0$, где замкнутый контур $\Gamma \subset G$. Тогда с учетом (13) имеем:

$$\begin{cases} ap - bq + ku\big|_\Gamma = 0, \\ u\big|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{14}$$

то есть $ap - bq\big|_\Gamma = 0$. При этом первая строка (12) означает согласно (3), что $p + iq$ представляет собой μ-голоморфную функцию. Поэтому, с учетом предложения 1, $p + iq \equiv \text{const}$. Здесь отметим, что если бы число k было комплексным, то в первом уравнении (14) фигурировала бы функция v, и данная схема не сработала бы. *В этом месте мы использовали то, что вектор $\overline{x}$ – вещественный.*

Расписывая теперь нижнюю строку (12), имеем:

$$(u+iv)_y - \lambda(u+iv)_x = \frac{d}{dx}((\mu-\lambda)\cdot \mathrm{const}) = 0,$$

то есть $u+iv$ будет λ-голоморфной. В силу этого условие $u\big|_\Gamma = 0$ в (14) означает согласно тому же предложению 1, что $u+iv \equiv \mathrm{const}$.

Итак, функция $\phi(x,y)$ является вектор-константой, что и требовалось доказать. ■

Отметим в заключение, что условие $k \neq 0$ в определении вещественного собственного вектора $\overline{x}_\lambda = (k,1)$ нами никак не использовалось, поэтому возможен случай, когда $\overline{x}_\lambda = (0,1)$. Однако же если $\overline{x}_\lambda = (1,0)$, то тогда по определению собственного вектора имеем равенство $(J-\lambda E)\cdot\overline{x}_\lambda = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $a_{11}-\lambda = 0$, $a_{21} = 0$, то есть матрица J – верхнетреугольная, а такой случай мы уже рассмотрели выше. По аналогии, $k = 0$ в векторе $\overline{x}_\lambda$ в теореме 2 соответствует нижнетреугольной матрице J.

Литература

1. Солдатов А.П. Функции, аналитические по Дуглису / А.П. Солдатов. – Издательство НовГУ, 1995. – 196 с.

2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ / В.В. Шабат. – М.: Наука, 1983. – 578 с.

3. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников. – М.: Наука, 1988. – 334 с.

ABOUT SOLUTION UNIQUENESS OF SCHWARTZ PROBLEM FOR FUNCTIONS WITH DUGLIS ANALYTICITY

V.G. Nikolaev

Bolshaya Sankt-Peterburgskaya, 41, Novgorod, 173003, Russia, e-mail:vg14@inbox.ru

Abstract. The article is devoted the study of solution uniqueness of the Schwarz homogeneous problem connected with vector-valued functions being analytic on Douglis. Two examples of matrices for which there is not solution uniqueness are built and also two matrix classes are given for which the problem solution is unique.

Key words: vector-function, matrix, eigenvalue, eigenvector, holomorphic property, closed contour, partial derivative.